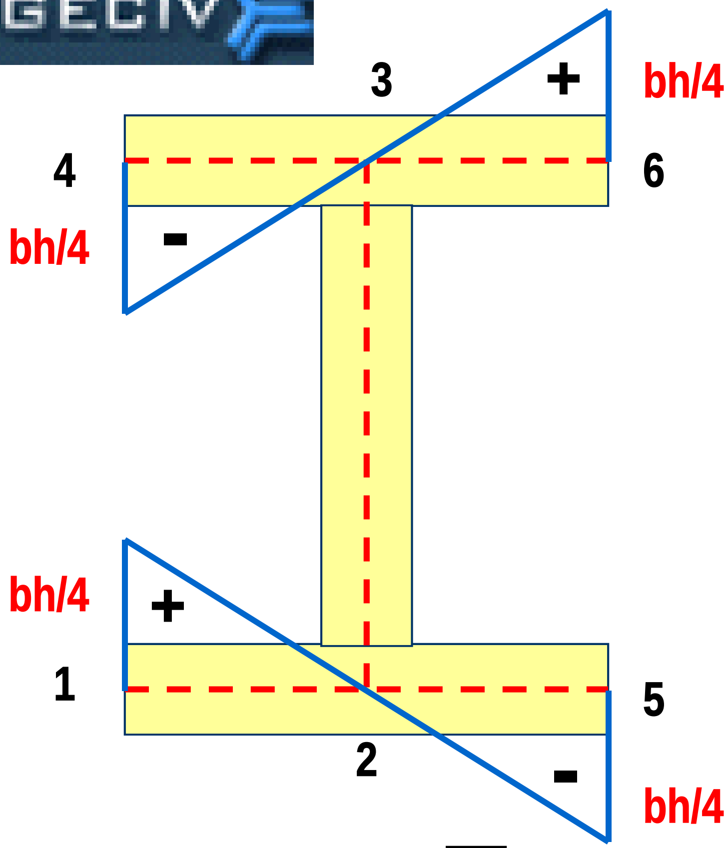
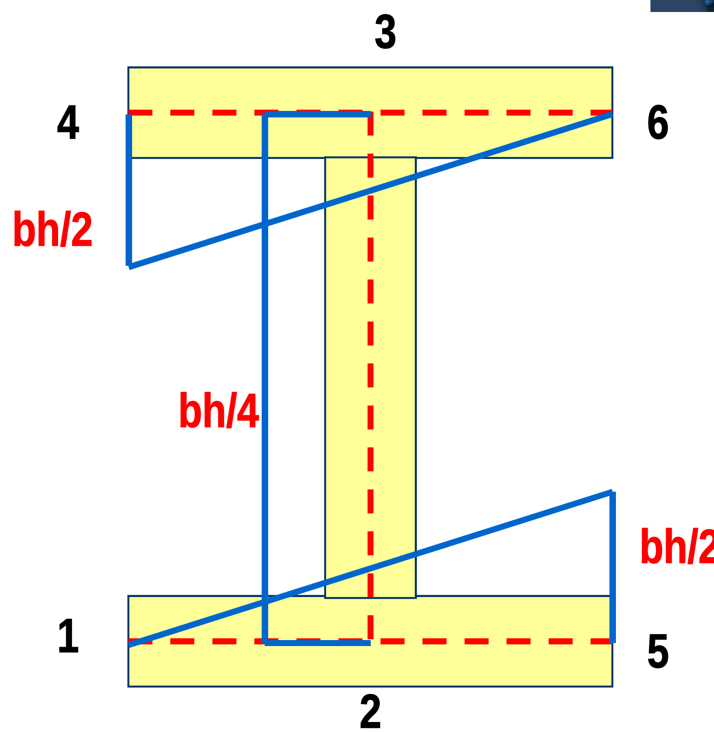




Empenamento

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Mestrado Acadêmico
Faculdade de Engenharia – FEN/UERJ
Professor: Luciano Rodrigues Ornelas de Lima

Introdução

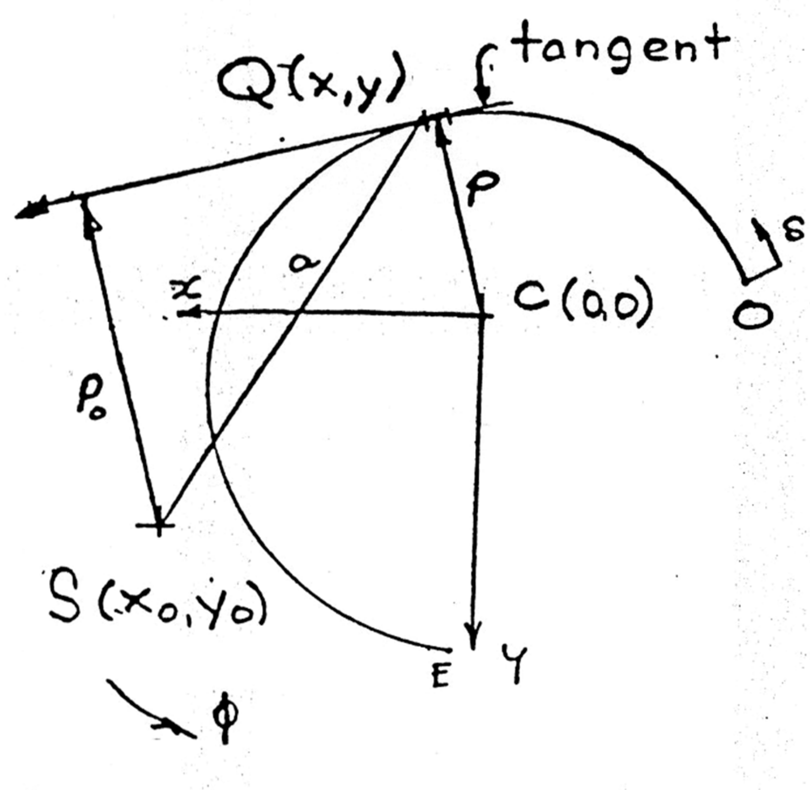
- Empenamento ocorre quando seções não-circulares são submetidas à torção
- Para seções I, na consideração da torção, introduziu-se

$$I_w = C_w = \frac{I_y}{4}(d - t_f)^2$$

- Agora, considera-se o empenamento em uma seção qualquer

Deformações de Empenamento

- seção aberta
- linha média da seção c/ centróide C(0,0), centro de cisalhamento $S(x_0,y_0)$ e um ponto qualquer Q(x,y)
- em Q $\longrightarrow$ tangente distante ρ de C e ρ_0 de S $\longrightarrow$ deslocamentos + u, v e ϕ

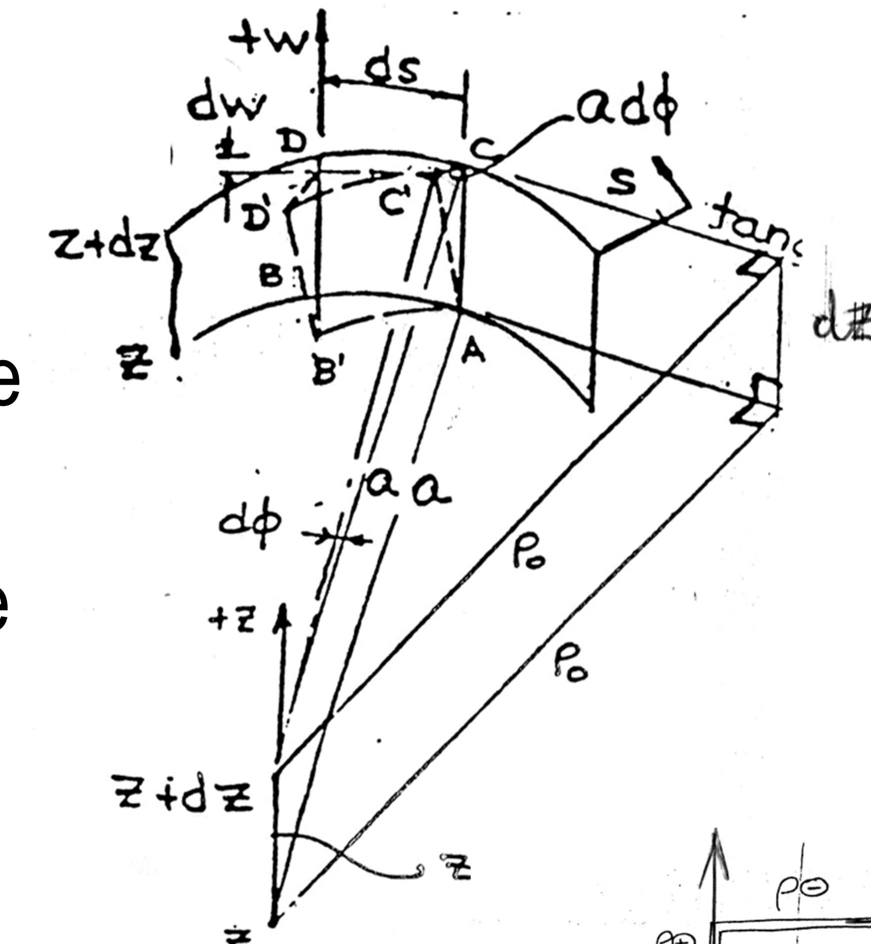


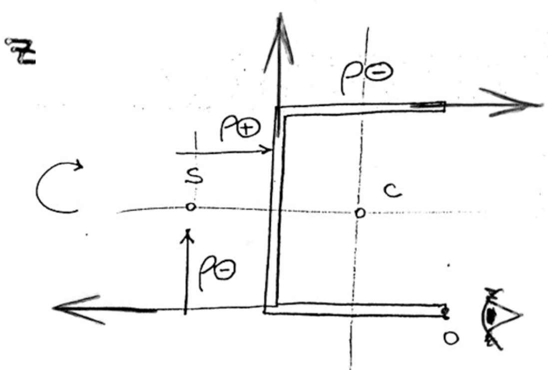
- distância a entre Q e S

PGECIV

Deformações de Empenamento

- elemento (faixa) dz
- ρ_0 e a → distâncias tangencial e direta entre S e Q
- A distância tangencial é positiva → um observador em Q olhar na direção + da tangente tem S à esquerda

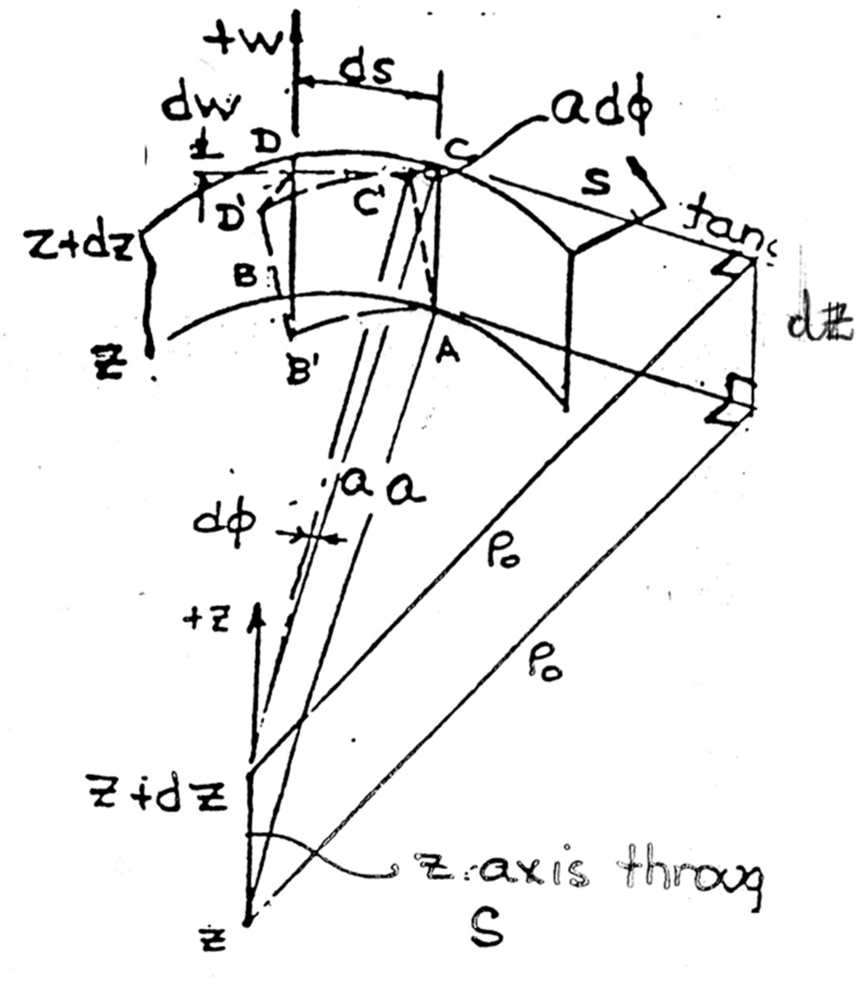




PGECIV

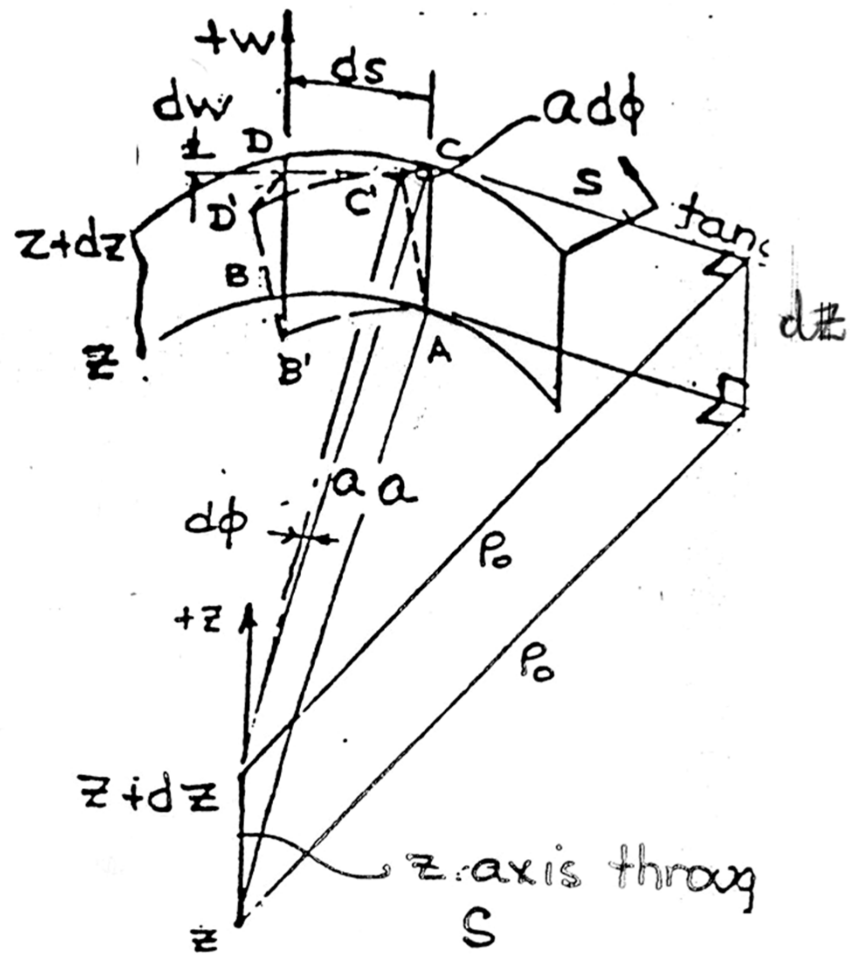
Deformações de Empenamento

- o elemento em Q é ds.dz
- A torção do elemento em torno de S → ABCD desloca-se p/ AB'C'D'
- no comprimento dz a torção vale dϕ
- o deslocamento de D → direção + de z vale dw
- mesmo deslocamento de B' → A



Deformações de Empenamento

- deformação por empenamento → distorção no plano
- dϕ + → dw –
- distância C'C = a.dϕ

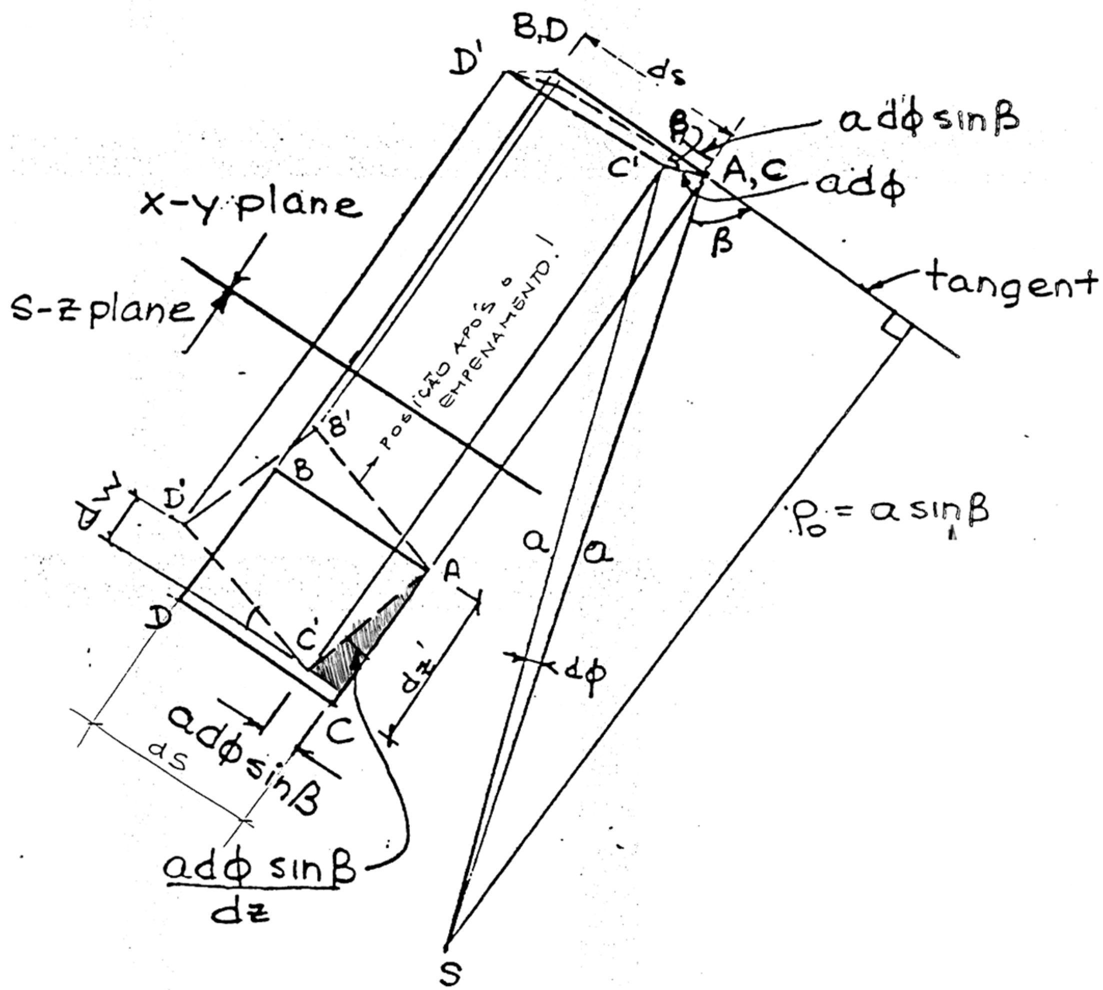


PGECIV

FEN

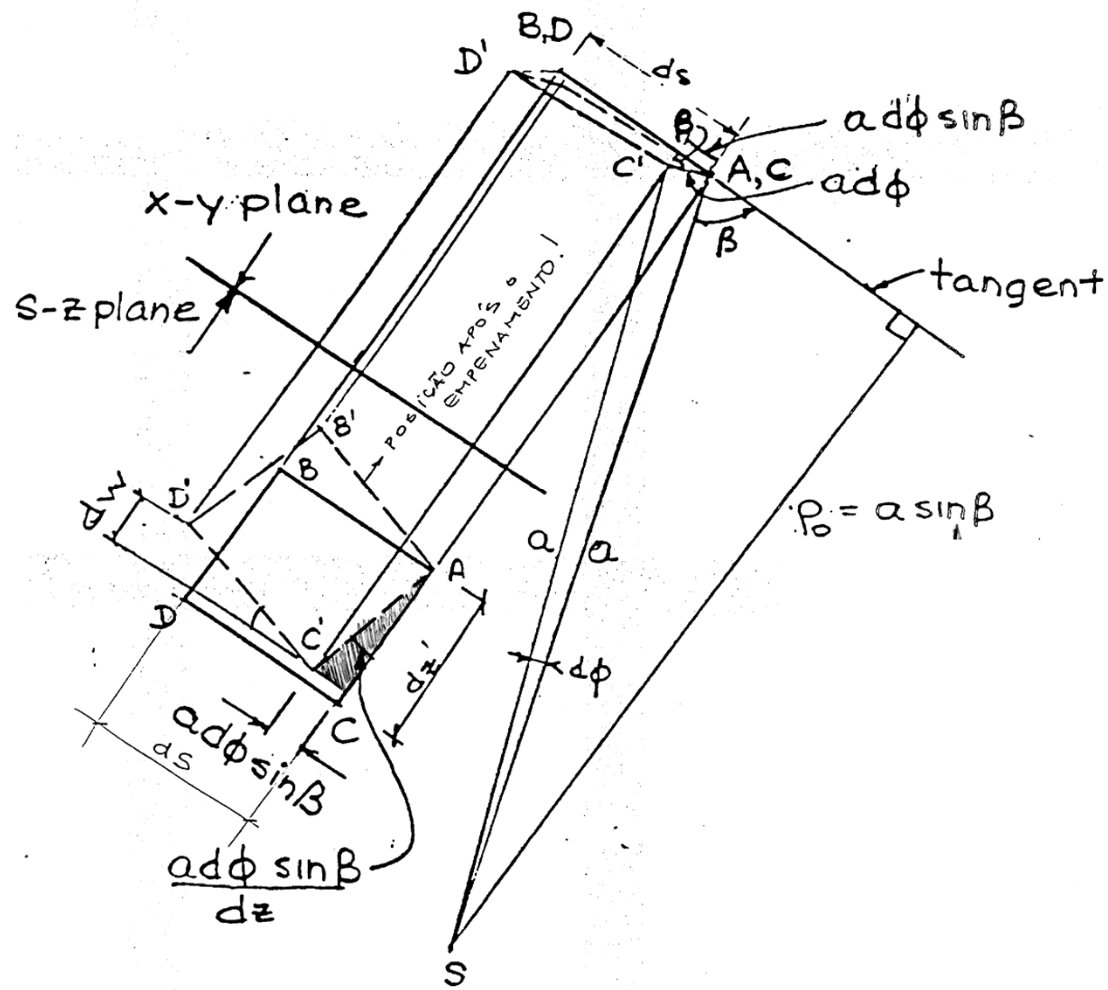
Deformações de Empenamento

- duas vistas → projeções ortogonais
  - ✓ no plano xy olhando p/ baixo
  - ✓ no plano s-z
- no plano xy → seção original sem empenamento → uma linha



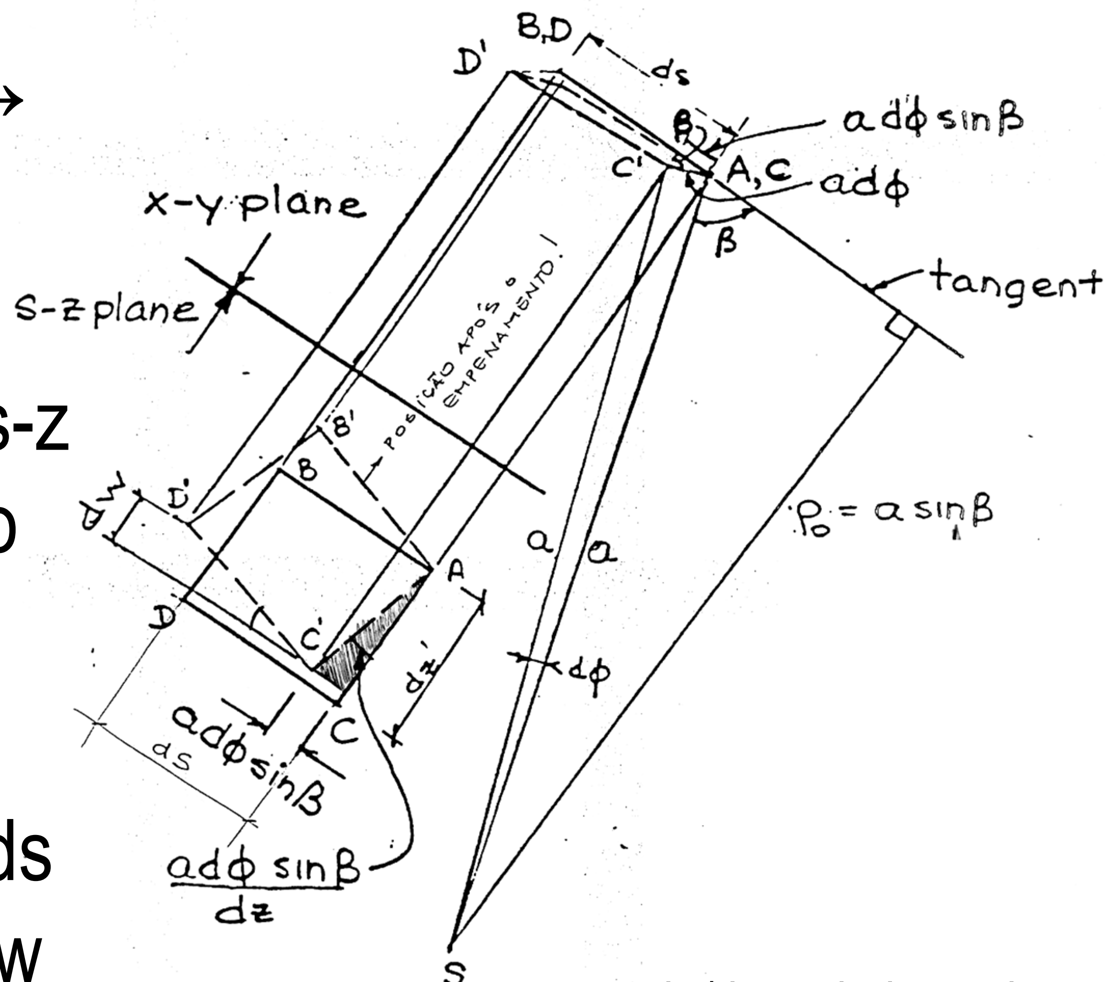
Deformações de Empenamento

- no plano s-z $\longrightarrow$ seção original aparece como um retângulo
- as configurações após o empenamento aparecem pontilhadas



Deformações de Empenamento

- nessas projeções ⟶ desprezando-se efeitos de 2ª ordem
- retângulo no plano s-z deforma-se segundo um ângulo a.sinβ.dϕ/dz
- dw = -a.sinβ.dϕ/dz.ds mas a.sinβ = ρ_0 e dw = - ρ_0.dϕ/dz.ds



- dϕ/dz ⟶ independe da seção

Deformações de Empenamento

- Então, se $dw = - \rho_0 . d\phi / dz . ds$

$$w = \int dw = -\frac{d\phi}{dz}\int_0^s \rho_0 ds + c \quad \text{ou} \quad w = w_0 - \frac{d\phi}{dz}\int_0^s \rho_0 ds$$

onde w = deformação por empenamento de qualquer ponto ao longo da linha média a uma distância S de O

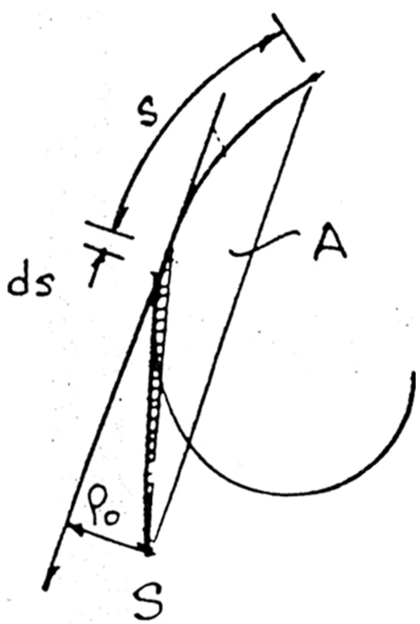
w_0 = deformação por empenamento no ponto O

PGECIV

Deformações de Empenamento

- Definindo-se o dobro da área setorial ou empenamento unitário em relação S

$$\omega_0 = \int_0^s \rho_0 ds \quad \Rightarrow \quad w = w_0 - \frac{d\phi}{dz}\omega_0 = w_0 - \phi'.\omega_0$$



$$A = \frac{1}{2}\int_0^s \rho_0 ds = \frac{\omega_0}{2} \Rightarrow \omega_0 = 2A$$

- assume-se que não há restrição ao empenamento $\longrightarrow$ não se desenvolvem deformações e tensões axiais

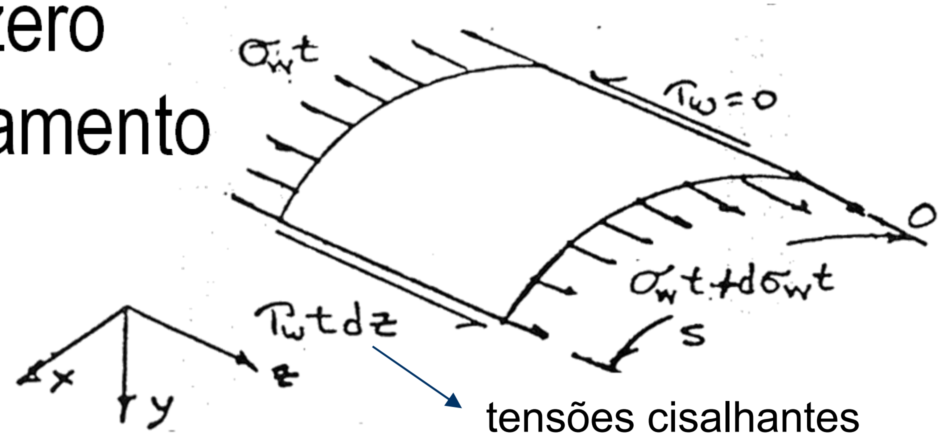
Torção Não-Uniforme

- Se as deformações por empenamento dadas por w são restringidas, tensões longitudinais (normais) desenvolvem-se $\sigma_w = E.\varepsilon_w$ e

$$\varepsilon_w = \frac{dw}{dz} = w' = w'_0 - \phi''.\omega_0$$

$$\sigma_w = E.w'_0 - E.\omega_0.\phi'' \qquad (\omega_0 = f(s) \text{ e não de } z)$$

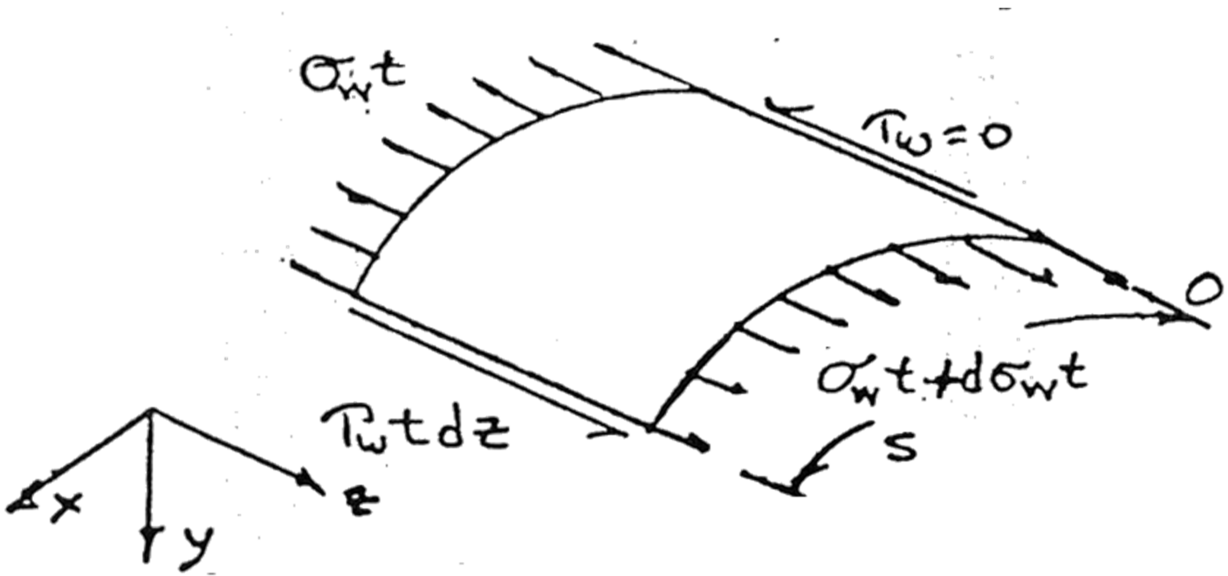
- tensões cisalhantes $\longrightarrow$ zero
  na face livre p/ o empenamento



tensões cisalhantes

Torção Não-Uniforme

$$\tau_w t.dz + \int_0^s t(\sigma_w + d\sigma_w)ds - \int_0^s t\sigma_w ds = 0 \therefore \ \tau_w t.dz = -\int_0^s t\frac{d\sigma_w}{dz}ds$$



Torção Não-Uniforme

- Como somente momento torsor é aplicado $\longrightarrow$ $P = M_x = M_y = 0$

$$P = 0 = \int_0^E \sigma_w t\, ds = E\int_0^E \left(w_0^{'} - \omega_0 \phi''\right) t\, ds$$

$$M_x = 0 = \int_0^E y\sigma_w t\, ds = E\int_0^E \left(w_0^{'} - \omega_0 \phi''\right) y.t\, ds$$

$$M_y = 0 = \int_0^E x\sigma_w t\, ds = E\int_0^E \left(w_0^{'} - \omega_0 \phi''\right) x.t\, ds$$

Torção Não-Uniforme

- Mas w_0 e w'_0 não são funções de s

$$P = 0 = \int_0^E \sigma_w t\, ds = E\int_0^E \left(w'_0 - \omega_0 \phi''\right) t\, ds$$

$$0 = w'_0 \int_0^E t\, ds - \phi'' \int_0^E \omega_0\, t\, ds \quad \text{ou} \quad w'_0 = \frac{\phi''}{A}\int_0^E \omega_0\, t\, ds$$

- E substituindo-se na equação de σ_w

$$\sigma_w = E.w'_0 - E.\omega_0.\phi'' \Rightarrow \sigma_w = E\phi''\left[\frac{1}{A}\int_0^E \omega_0\, t\, ds - \omega_0\right]$$

- E definindo-se o empenamento normalizado ω_n

PGECIV

Torção Não-Uniforme

- E definindo-se o empenamento normalizado $\omega_n \rightarrow$ propriedade da seção transversal relacionada com as tensões normais de empenamento da seção S a O

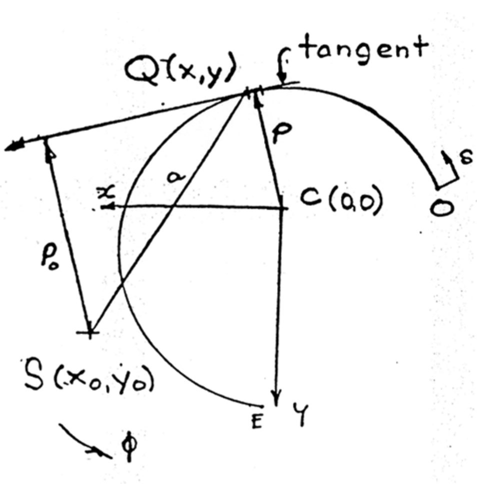
$$\omega_n = \underbrace{\frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 \, t \, ds}_{\text{ao longo de toda a seção}} - \overbrace{\omega_0}^{\text{em relação a origem}}$$

$$\sigma_w = E\phi''\left[\frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 \, t \, ds - \omega_0\right] = E\phi''\omega_n$$

Torção Não-Uniforme

- Lembrando do fluxo de cisalhamento τt

$$\left.\begin{aligned} \tau_w t &= -\int_0^s t\,\frac{d\sigma_w}{dz}\,ds \\ \sigma_w &= E\phi''\omega_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_w t = -\int_0^s t\,E\phi'''\omega_n ds$$



- na figura ao lado onde o fluxo cisalhante em Q = τt, o momento torsor total é

$$M_w = \int_0^E \tau_w t\,\rho_0 ds \Rightarrow M_w = -E\phi'''\int_0^E \rho_0\left(\int_0^s \omega_n t\,ds\right)ds$$

Torção Não-Uniforme

$$M_w = \int_0^E \tau_w t \rho_0 ds \Rightarrow M_w = -E\phi''' \int_0^E \rho_0 \left(\int_0^s \omega_n t \, ds \right) ds$$

- Integrando-se por partes

$$\int u \, dv = u.v - \int v \, du \quad \text{com} \quad u = \int_0^s \omega_n t \, ds \quad \text{e} \quad dv = \rho_0 ds$$

$$du = \omega_n t \, ds \quad \text{e} \quad v = \int_0^s \rho_0 ds = \omega_0$$

- Fornecendo

$$M_w = E\phi''' \left(\omega_0 \Big|_0^E \int_0^E \omega_n t \, ds - \int_0^E \omega_0 \omega_n t \, ds \right)$$

PGECIV

FEN

Torção Não-Uniforme

- Mas $\omega_n = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 \, t \, ds - \omega_0$ e
- Logo $\int_0^E \omega_n \, t \, ds = \int_0^E \left(\underbrace{\frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 \, t \, ds}_{\text{constante}} - \omega_0 \right) t.ds$

$$\therefore \int_0^E \omega_n \, t \, ds = \frac{1}{\cancel{A}}\int_0^E \omega_0 \, t \, ds \underbrace{\int_0^E t \, ds}_{\cancel{A}} - \int_0^E \omega_0 \, t \, ds$$

$$= \int_0^E \omega_0 \, t \, ds - \int_0^E \omega_0 \, t \, ds = 0$$

PGECIV

Torção Não-Uniforme

- Na equação de $M_w \longrightarrow$ sobra apenas o segundo termo

$$M_w = E\phi'''\left(\omega_0\Big|_0^E \underbrace{\int_0^E \omega_n t\, ds}_{\text{zero}} - \int_0^E \omega_0 \omega_n t\, ds \right)$$

- E na equação do empenamento normalizado

$$\omega_n = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0\, t\, ds - \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0\, t\, ds - \omega_n$$

- Fornecendo $\displaystyle \int_0^E \omega_0 \omega_n t\, ds = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 t ds \int_0^E \omega_n t ds - \int_0^E \omega_n^2 t ds$

PGECIV

Torção Não-Uniforme

$$\int_0^E \omega_0\omega_n t\,ds = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 t ds \int_0^E \omega_n t ds - \int_0^E \omega_n^2 t ds$$

zero

$$M_w = -E\phi''' \int_0^E \omega_0\omega_n t\,ds \Rightarrow M_w = -E\phi''' \int_0^E \omega_n^2 t\,ds$$

$$\boxed{M_w = -EI_w\phi'''}$$ onde $$\boxed{I_w = \int_0^E \omega_n^2 t\,ds}$$

Momento de inércia de empenamento (mm^6)

- Lembrando-se que

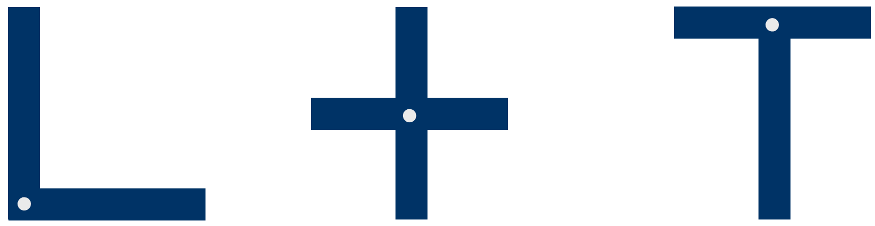
$$\omega_n = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0\, t\,ds - \omega_0 \left(mm^2\right) \quad \text{e} \quad \omega_0 = \int_0^s \rho_0\, ds \left(mm^2\right)$$

Torção Não-Uniforme

- Nota-se que da equação do momento devido ao empenamento, se todos os ρ_0 são zero, M_w=0

$$M_w = \int_0^E \tau_w t \rho_0 ds$$

- Para seções transversais feitas de elementos de placas planas que se encontram em um ponto tais como cantoneiras, cruciformes e T's $\longrightarrow$ M_w=0



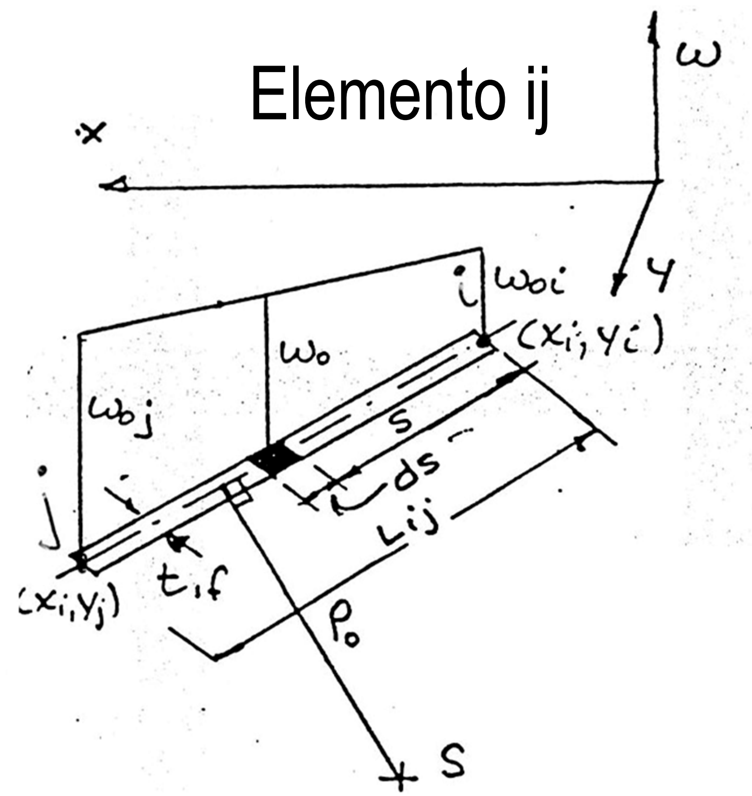
Cálculo de I_w

- Deve-se lembrar que ω_0 e ω_n são propriedades da seção transversal dependentes de s
- Propriedades de empenamento unitário
- ρ_0 constante p/ o elemento

$$\therefore \omega_0 = \rho_0 \int_0^s ds$$

- Com variação linear

Elemento ij



Cálculo de I_w

- Com variação linear

$$\omega_{0j} = \sum_{i=0}^{i=j} \rho_{0ij} L_{ij} \quad \text{e} \quad \omega_{nj} = \frac{1}{A}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n}\left(\omega_{0i} + \omega_{0j}\right) t_{ij} L_{ij}\right] - \omega_{0j}$$

- E para cada elemento de s até o fim

$$\omega_n = \omega_{ni} + \frac{\omega_{nj} - \omega_{ni}}{L_{ij}}.s$$

- Portanto

$$\int \omega_n^2 t ds = \sum_0^{L_{ij}} \left[\omega_{ni} + \frac{\omega_{nj} - \omega_{ni}}{L_{ij}}.s\right]^2 t_{ij} ds$$

PGECIV

FEN

Cálculo de I_w

$$\int \omega_n^2 t\,ds = \sum_0^{L_{ij}} \left[\omega_{ni} + \frac{\omega_{nj} - \omega_{ni}}{L_{ij}}.s \right]^2 t_{ij} ds$$

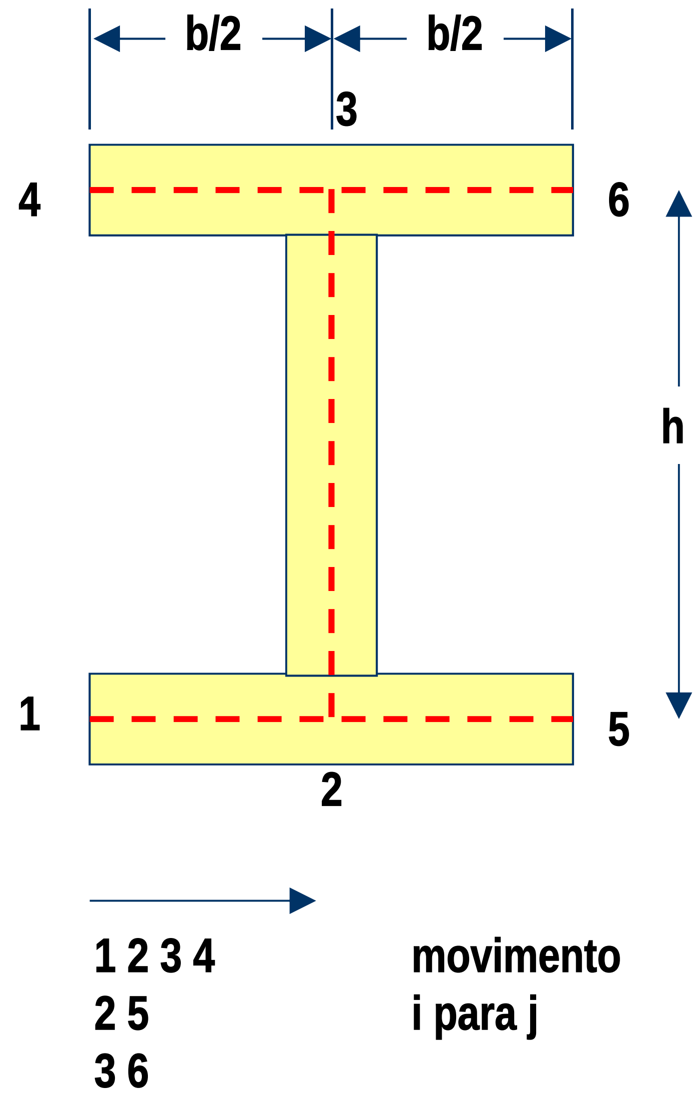
$$= t_{ij} \left[\omega_{ni}^2 L_{ij} + \frac{2\omega_{ni}\left(\omega_{nj} - \omega_{ni}\right)}{L_{ij}} \frac{L_{ij}^2}{2} + \left(\frac{\omega_{nj} - \omega_{ni}}{L_{ij}} \right)^2 \frac{L_{ij}^3}{2} \right]$$

$$= t_{ij} L_{ij} \left[\omega_{ni}^2 + \omega_{ni}\omega_{nj} - \omega_{ni}^2 + \frac{\omega_{nj}^2}{3} - \frac{2}{3}\omega_{nj}\omega_{ni} + \frac{\omega_{ni}^2}{3} \right]$$

$$= \frac{t_{ij} L_{ij}}{3} \left[\omega_{ni}^2 + \omega_{nj}\omega_{ni} + \omega_{nj}^2 \right] \Rightarrow \boxed{I_w = \frac{1}{3} \sum_0^n \left(\omega_{ni}^2 + \omega_{nj}\omega_{ni} + \omega_{nj}^2 \right) t_{ij} L_{ij}}$$

Exemplo

- Considera-se um perfil I representado através da linha média da espessura
- As extremidades de cada placa são numeradas
- A distância ao longo do elemento é s
- ρ_{0ij} é a distância perpendicular do centro de cisalhamento até cada elemento
- ρ_0 é positivo quando indo de i para j o centro de cisalhamento estiver à esquerda



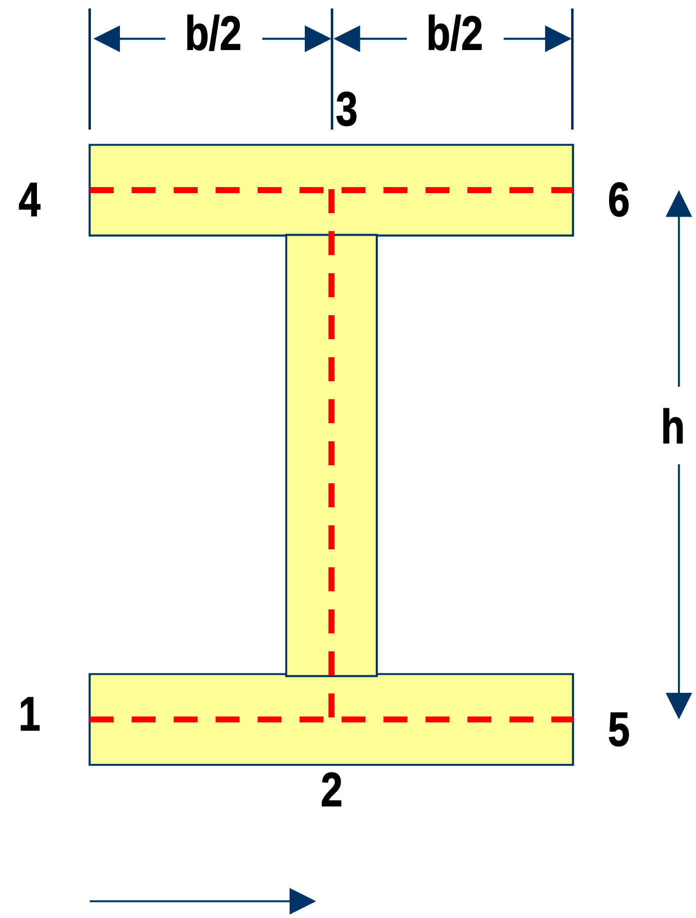
Exemplo

$$\omega_n = \frac{1}{2A}\left[\sum\left(\omega_{0i} + \omega_{0j}\right)t_{ij}L_{ij}\right] - \omega_{0i}$$

- Assume-se $\omega_{01} = 0$
- $2A = 2\,[2.t.b + w.h]$ onde t é a espessura da mesa e w a espessura da alma

$$\omega_n = \frac{1}{2[2tb + wh]}\left[b^2ht + \frac{bh^2w}{2}\right] - \omega_{0i}$$

$$\omega_n = \frac{bh}{4}\frac{[2bt + wh]}{[2bt + wh]} - \omega_{0i} = \frac{bh}{4} - \omega_{0i}$$



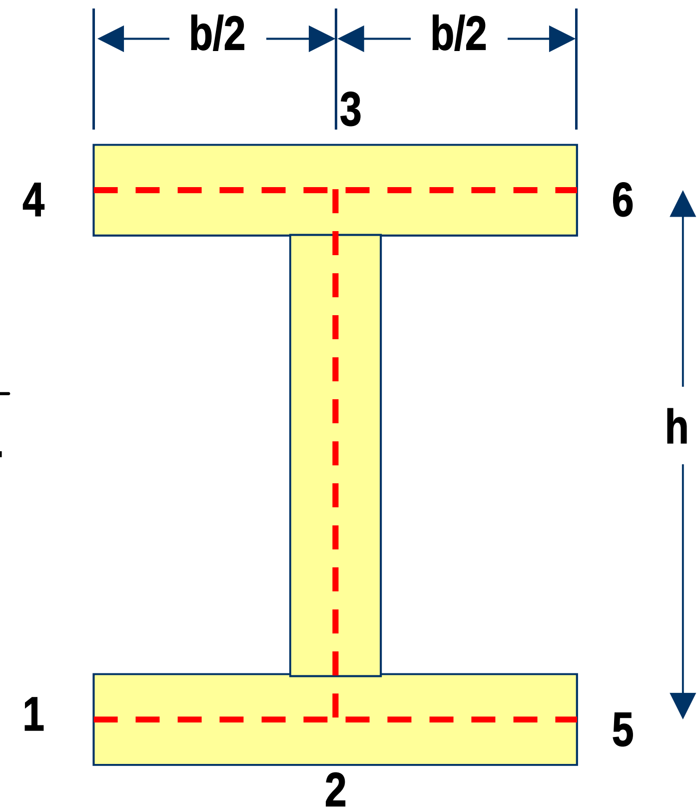
1 2 3 4 movimento
2 5 i para j
3 6

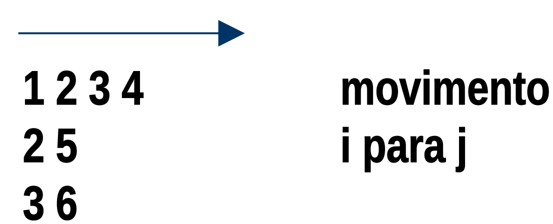
Exemplo

$$I_w = \frac{1}{3}\left[\sum\left(\omega_{ni}^2 + \omega_{nj}\omega_{ni} + \omega_{nj}^2\right)t_{ij}L_{ij}\right]$$

$$I_w = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{bh}{4}\right)^2 \frac{tb}{2}\right].4 = \frac{b^3h^2t}{24} = \frac{2b^3t}{12}.h^2.\frac{1}{4}$$

$$I_w = I_y.\frac{h^2}{4}$$

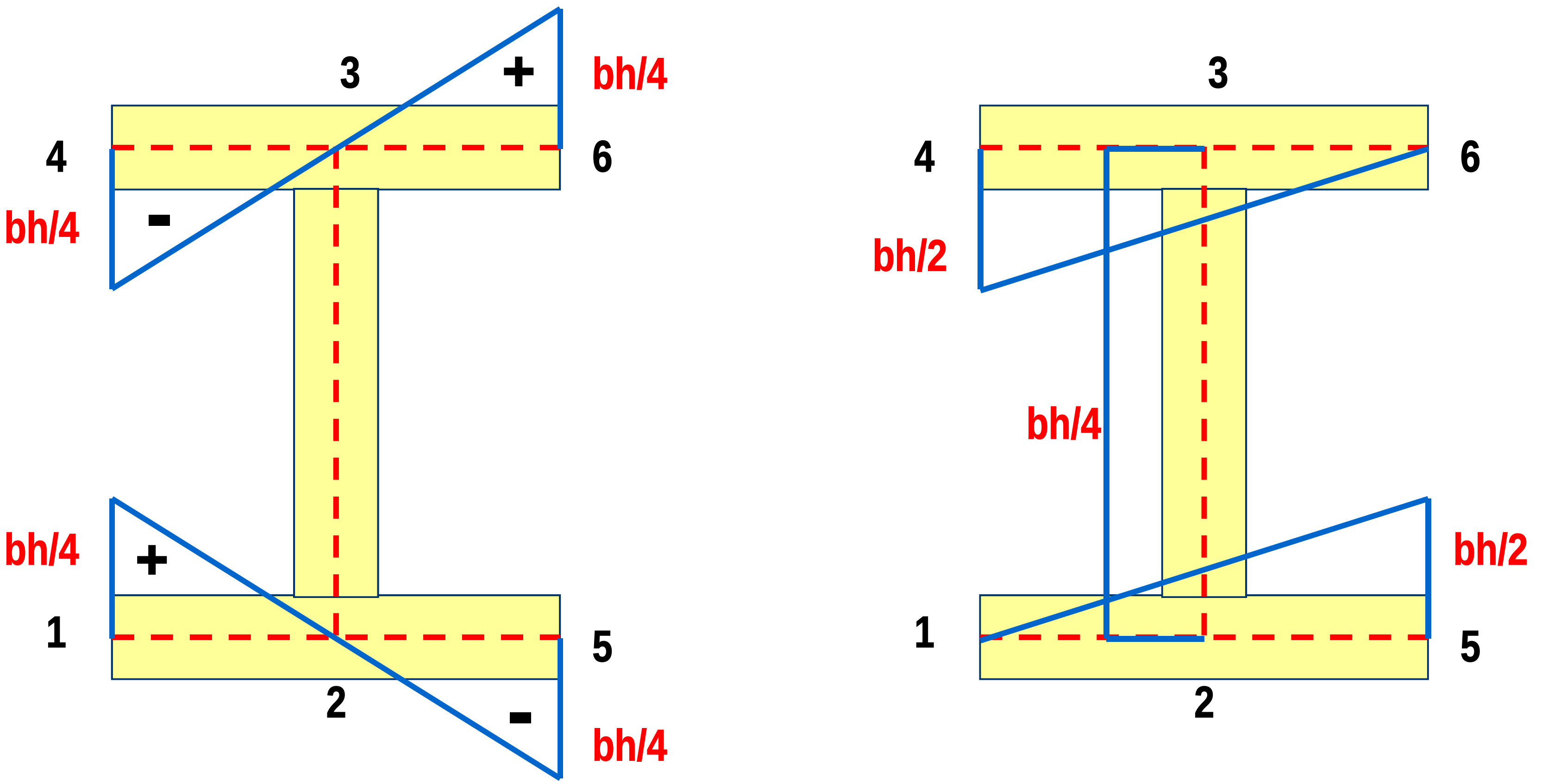




Exemplo

Ponto	ρ_0	L_{ij}	$\rho_0 L_{ij}$	$\omega_0=\Sigma$	$t_{ij}L_{ij}$	$(\omega_{0j}+\omega_{0i})t_{ij}Lij$	ω_n
1				0			bh/4
	h/2	b/2	bh/4		tb/2		
2				bh/4		$b^2ht/8$	0
	0	H	0		wh		
3				bh/4		$bh^2w/2$	0
	h/2	b/2	bh/4		tb/2		
4				bh/2		$3b^2ht/8$	-bh/4
2				bh/4			0
	h/2	b/2	bh/4		tb/2		
5				bh/2		$3b^2ht/8$	-bh/4
3				bh/4			0
	-h/2	b/2	- bh/4		tb/2		
6				0		$b^2ht/8$	bh/4
					Σ	$b^2ht + bh^2w/2$	

Exemplo



Distribuição de ω_n

Distribuição de ω_0